UEMSTIS – TAMAULIPAS
CBTis 164, Cd. Madero, Tam.
CURSO: Cálculo Diferencial
UNA APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES
OBJETIVO: Aplicar a un caso real un par de modelos exponenciales, con fines predictivos

Nos encontramos viviendo una situación inédita que nos da una idea del grado de globalización que hemos alcanzado. El mundo entero tiene sobre sí la consigna, y en algunos casos orden terminante, de no salir de casa más que para lo indispensable. ¿Causa? Un virus que al parecer se comenzó a propagar en una región de China y que después de haber viajado por el mundo entero ya rebasa las 160,000 víctimas mortales en centenares de países y, todos nos preguntamos ¿cuánto va a durar esta situación? ¿Alguien lo sabe? No, porque la respuesta depende de muchos factores, pero, si se guarda una sana distancia, se recibe atención médica oportuna y adecuada, se tiene una dieta alimenticia correcta y una serie de etcéteras más, es posible, al menos, intentar arriesgar algún pronóstico.

A lo que también hemos estado expuestos es a una ***infodemia***, término recientemente acuñado para referirse a la epidemia de información relacionada con el COVID19, información tal como ***la curva epidémica***, ***el pico epidémico***, ***torcer la curva***, ***achatar la curva***, (¿¿tú entiendes esto??) etc. y ni qué decir de la epidemia de epidemiólogos que ahora escuchamos y vemos en todos los medios, en las redes sociales y que son personas que hablan sin parar del tema sin ellos saber exactamente de qué están hablando.

Para adentrarnos superficialmente en el mundo de los pronósticos epidémicos es necesario basarnos en los datos de lo que hasta el momento ya ha ocurrido y, además, usar un poco de la matemática que ya has estudiado en tus clases de **Cálculo**. Así también, podemos echar mano de alguna herramienta matemática nueva para nosotros que, en este caso, puede ser de alguna utilidad.

Es muy importante aclarar que éste es un ejercicio de aprendizaje en donde **no se pretende predecir el futuro sino ayudar a comprender cómo funciona una epidemia como la que nos tiene encerrados en casa**. Para ello comenzaremos haciendo un recuento de lo que hasta el momento hemos revisado en nuestro curso de Cálculo Diferencial:

- ¿qué es una variable?
- ¿qué es una función?
- ¿a qué se le llama dominio de una función y qué cosa es su imagen?
- Graficación de una función
- Tipos de comportamientos gráficos de una función (lineal, cuadrático, cúbico, exponencial)
- ¿qué entendemos por velocidad de cambio de una variable?
- ¿qué es la derivada de una función?
- Punto de inflexión

Todo lo anterior ha estado referido a diferentes contextos como lo es el movimiento de objetos usando un sensor de posición **Arduino**, el cambio de áreas de un gallinero, de una ventana, del puesto de un vendedor y esto último se ha estudiado con la ayuda de **GeoGebra**.

Por último, revisamos anteriormente una actividad en donde nuestro objeto de estudio era el crecimiento de un árbol (https://www.youtube.com/watch?v=x-C2lFSt9A8) en donde las variables identificadas fueron la altura del árbol y el tiempo. Recordarás que, en este caso el tipo de relación entre estas variables se llama ***logístico***, que es un tipo especial de función ***exponencial***.

¿Podemos aventurarnos en el asunto de la **pandemia del COVID19** con las herramientas matemáticas arriba mencionadas? Intentémoslo.

Vamos a utilizar para adentrarnos en este tema del COVID19 un par de funciones. La primera, una función de tipo ***Logístico***, $L(t)$, ya conocida por ti pues la usamos para explicarnos cómo crecen los árboles.

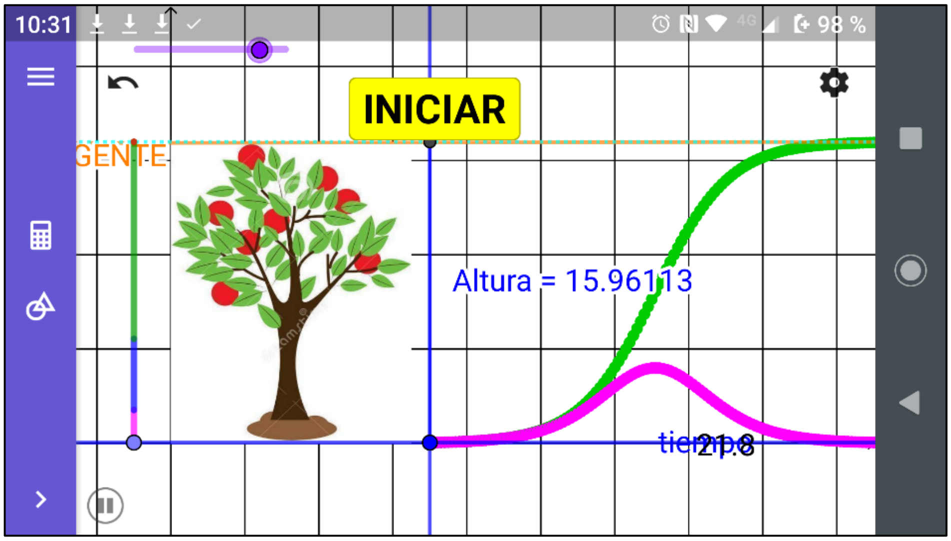


Figura 1: CrecimientodeArbol4.ggb

En la figura 1 tenemos una curva conocida. De hecho, no es solo una curva, son dos. En la primera observamos la relación ***Altura vs. tiempo*** (gráfica verde) y en ella, se puede distinguir un punto, que es aquel en donde la velocidad de crecimiento que llevaba la planta en plena adolescencia, comienza a disminuir (¿recuerdas su nombre?). El crecimiento continúa, pero ya no tan rápido como antes y, a medida que el árbol se acerca a su madurez y el tiempo sigue transcurriendo, su altura deja de aumentar para "estabilizarse" lo que significa que ésta se vuelve constante.

Abajo tenemos un segundo gráfico color rosa que relaciona la velocidad de crecimiento $V(t)$ con el tiempo t, en donde observamos primero un comportamiento creciente y después un comportamiento decreciente. La razón de ello se encuentra en que, si bien al principio la plantita tarda en germinar y crece muy lentamente, al llegar a un cierto momento de su vida (adolescencia, se le llama al equivalente en los humanos) la planta crece muy rápidamente hasta que llega un momento cuando ya no es solo una planta, sino que se convirtió en un árbol joven que sigue creciendo, pero más lentamente pues se encuentra próxima su edad adulta. En este punto, en el que su velocidad comienza a decrecer, se le conoce como **PUNTO DE INFLEXIÓN** y se podría decir que es donde el gráfico $A(t)$ ***vs.*** t, se empieza a "torcer". ¿Recuerdas cómo en los medios has escuchado la expresión **TORCER LA CURVA**? Pues éste es el origen de la expresión.

¿Qué expresión describiría mejor el comportamiento de la velocidad de crecimiento del árbol?

a) La velocidad crece de manera constante b) La velocidad primero crece y después decrece c) La velocidad primero decrece y después crece

Habiendo elegido uno de los tres enunciados anteriores, ¿puedes identificar qué variables son las que se relacionan en el segundo gráfico de la Fig. 1?

a) Altura vs. tiempo   b) Aceleración vs. tiempo   c) Velocidad vs. tiempo

Y, para entrar en materia revisa la imagen siguiente y carga en tu dispositivo, usando la **app Geometría de GeoGebra** el archivo **COVID19Logística.ggb**. Pulsa el botón INICIAR y observa qué sucede

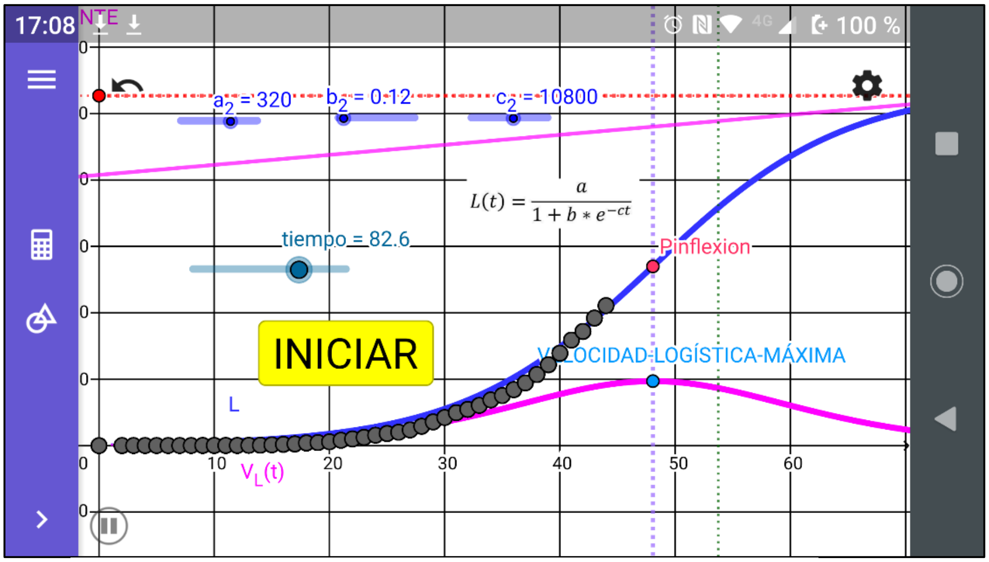


Figura 2: COVID19Logística.ggb

Es muy similar a la anterior. Pero, un momento. Hagamos una pausa para preguntarnos, ¿qué son esos puntos oscuros que aparecen en la figura? Esos puntos son los datos de la cantidad de contagios acumulados que ha estado registrando y publicando el gobierno mexicano a partir del 27 de febrero del 2020 y es lo que en los medios de comunicación denominan **CURVA EPIDÉMICA**. Entonces, la gráfica azul, ¡¡no relaciona la altura de un árbol con el tiempo sino el **número de contagios acumulados de COVID19 con el tiempo**!! ¿Te hace eso sentido?,¿que los primeros días el número de contagios era pequeño, después fue en aumento cada vez más y más y esperaríamos que llegado el **PUNTO DE INFLEXIÓN** la velocidad con la que cambia el número de personas contagiadas comenzara a disminuir?

Día	**contagios acumulados oficiales**	**Día**	**Velocidad de contagios o Nuevos contagios**
0	3	0	
1	4	1	1
2	5	2	1
3	5	3	0
4	5	4	0
5	5	5	0
6	5	6	0
7	6	7	1
8	7	8	1
9	7	9	0
10	7	10	0

11	7	11	0
12	11	12	4
13	15	13	4
14	26	14	11
15	41	15	15
16	53	16	12
17	82	17	29
18	93	18	11
19	118	19	25
20	164	20	46
21	203	21	39
22	251	22	48
23	316	23	65
24	367	24	51
25	405	25	38
26	475	26	70
27	585	27	110
28	717	28	132
29	848	29	131
30	993	30	145
31	1094	31	101
32	1215	32	121
33	1378	33	163
34	1510	34	132
35	1688	35	178
36	1890	36	202
37	2143	37	253
38	2439	38	296
39	2785	39	346
40	3181	40	396
41	3441	41	260
42	3844	42	403
43	4219	43	375
44	4661	44	442
45	5014	45	353
46	5399	46	385
47	5847	47	448
48	6297	48	450
49	6875	49	578
50	7497	50	622
51	8261	51	764

Contagios acumulados oficiales a partir del 27 de febrero de 2020

Por lo anterior, algunos estudiosos de los fenómenos epidémicos han considerado que el acumulado de personas contagiadas (le llamaremos simplemente **contagios** y lo representaremos con una C) guardan una relación con el tiempo similar a la que existe entre la altura de un árbol y el tiempo, cuando éste se encuentra en su etapa de crecimiento. Para que observes qué significa esto, abre el archivo **COVID19Logística.ggb** que ya debes tener en tu celular.

Luego, en pantalla también tenemos una expresión

$$L(t) = \frac{a}{1+b*e^{-ct}} \quad (1)$$

Ésta corresponde a un **modelo Logístico**. Los valores **a**, **b** y **c** los establecemos con los deslizadores **a_2**, **b_2** y **c_2** ubicados en pantalla y tienen algunos significados físicos. Por ejemplo, **c** representa el valor máximo de contagios acumulados que se asume se van a presentar durante una epidemia, lo cual durante la epidemia no se conoce y solo es posible suponerlo a priori.

Ahora, ¿qué relación está representada por el gráfico rosa? ¡¡¡Acertaste!!! La **velocidad de contagios**, valor que se calcula con la fórmula

$$Velocidad_{Contagios} = \frac{ContagiosDía(N) - ContagiosDía(N-1)}{Día(N) - Día(N-1)} = \frac{\Delta C}{\Delta t} \approx \frac{dC}{dt}$$

Y aplicando esta fórmula para cada uno de los días registrados en una hoja de cálculo obtenemos los datos cuyos puntos oscuros aparecen en la figura anterior (**HISTÓRICO COVID19.xlsx**).

Sin embargo, los especialistas que estudian estos fenómenos epidémicos afirman algo muy importante a considerar a la hora de elegir un modelo (para nosotros, una **FUNCIÓN**) para analizar nuestros datos: **las velocidades con la que se propaga la enfermedad son mayores a las velocidades de propagación después de que se alcanza la velocidad máxima**. ¿Te hace sentido esta afirmación? Echémosle un vistazo a lo sucedido en China país en donde, a fuerza de decretar medidas de distanciamiento fuertísimas entre la población para evitar que salieran de sus casas, entre las que se cuenta colocación de sensores de movimiento en la puerta de las casas para detectar cuándo alguien intenta salir, lograron detener en seco a la enfermedad:

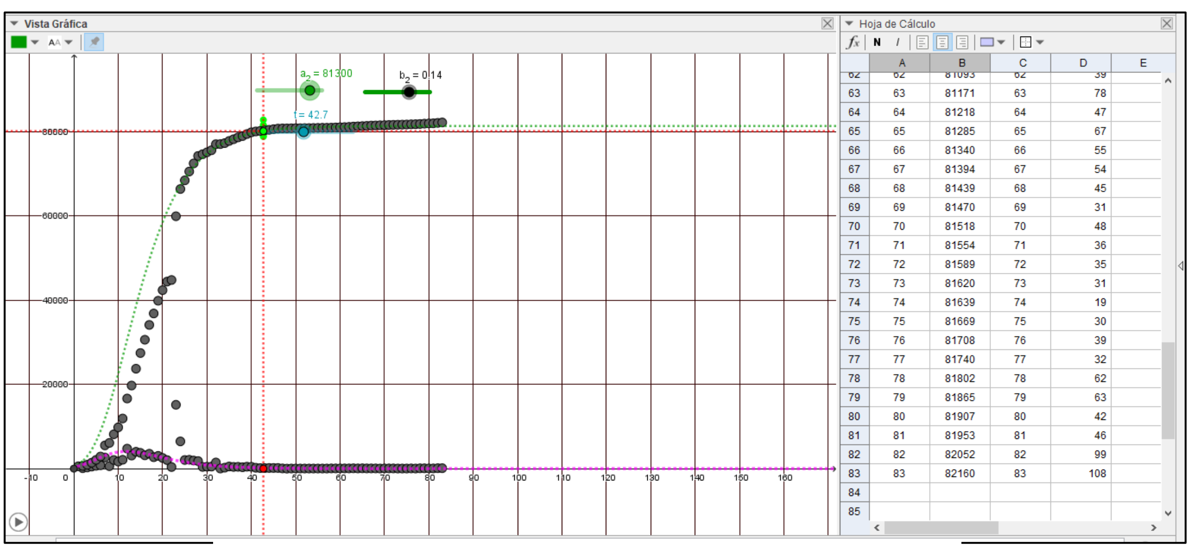


Figura 3: China.ggb

Lo que vemos en la figura anterior, arriba, los datos de ***contagios acumulados***, ***C vs***. tiempo, ***t*** del 22 de enero al 13 de abril[1] y, en la parte de abajo los valores de ***contagios nuevos vs. tiempo*** en el mismo intervalo de tiempo o lo que también podemos considerar la ***velocidad de los contagios, V vs. tiempo***. Nótese además la presencia de un par de gráficos cuyo comportamiento se aproxima a la información real.

Por una parte, arriba tenemos un gráfico verde que se aproxima a los datos ***C vs. t*** y en la parte inferior hay un gráfico rosa con el que se intenta modelar los valores ***V vs. t***.

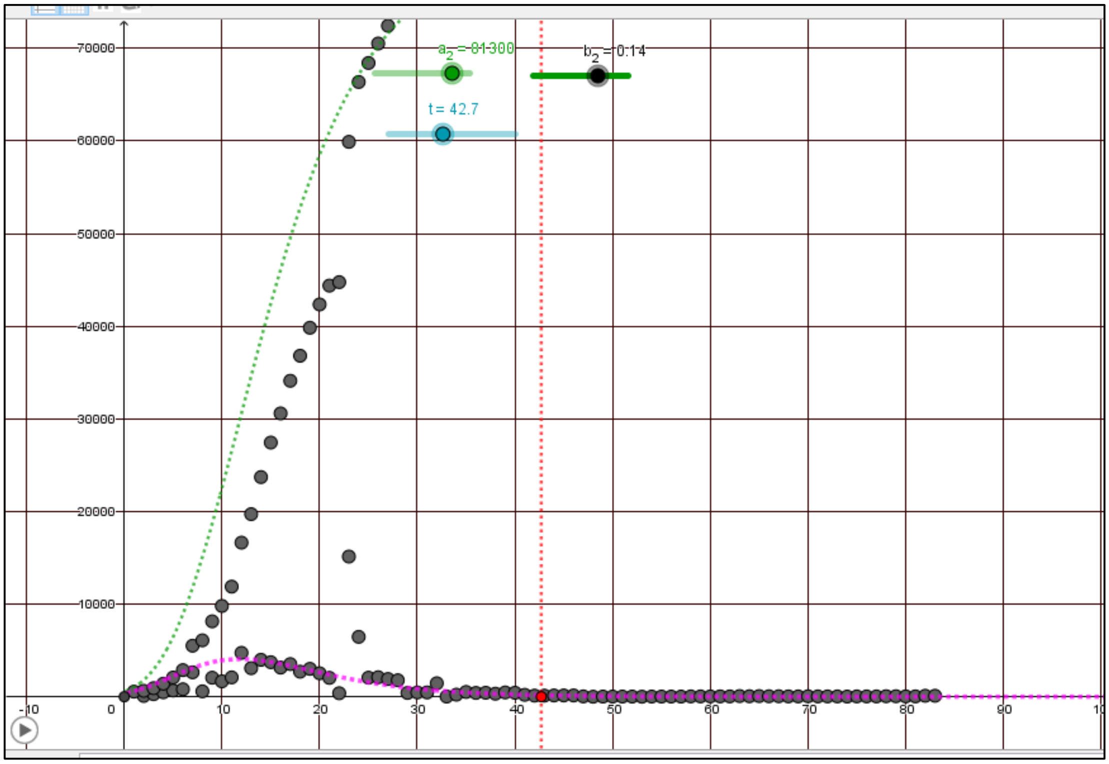


Figura 4: China.ggb

[1] https://es.statista.com/estadisticas/1107716/covid-19-casos-confirmados-muertes-y-recuperados-por-dia-china/

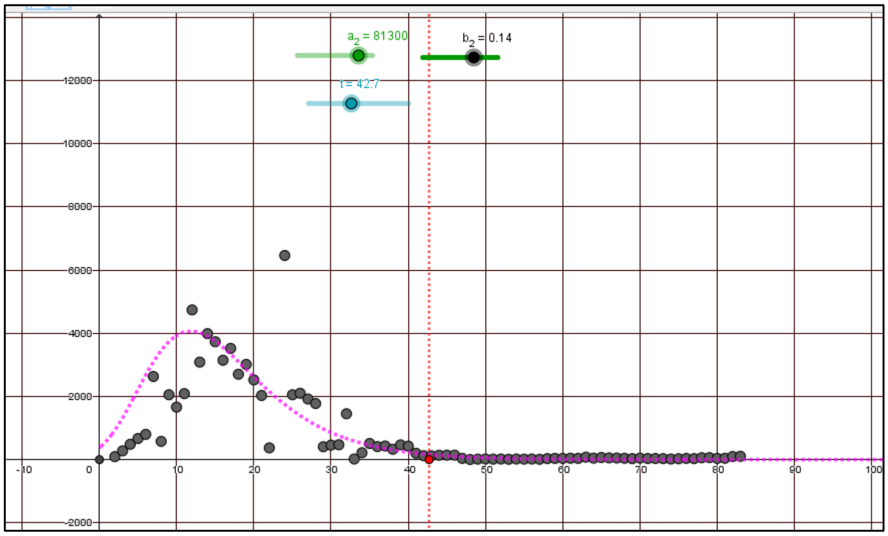


Figura 5: China.ggb

En la Figura 5 hacemos un acercamiento al gráfico ***V*(*t*) *vs*. *t*** y notamos algo que pudiera confirmar lo dicho por los epidemiólogos: <u>la velocidad alcanza su valor más alto (lo que llaman el "**EL PICO EPIDÉMICO**" de 4739 nuevos casos en un día) en los primeros 12 días y hasta el día 83, la velocidad se encontraba en 108 contagios nuevos por día lo que nos dice que tuvieron que transcurrir ¡¡¡71 días para que la velocidad pasara de 4739 a 108!!!</u> Esto último expresa también que, si bien la epidemia ya está en control, aún no ha desaparecido.

Habiendo dicho lo anterior, carguemos en nuestro dispositivo el archivo **COVID19Logística-Gompertz.ggb**

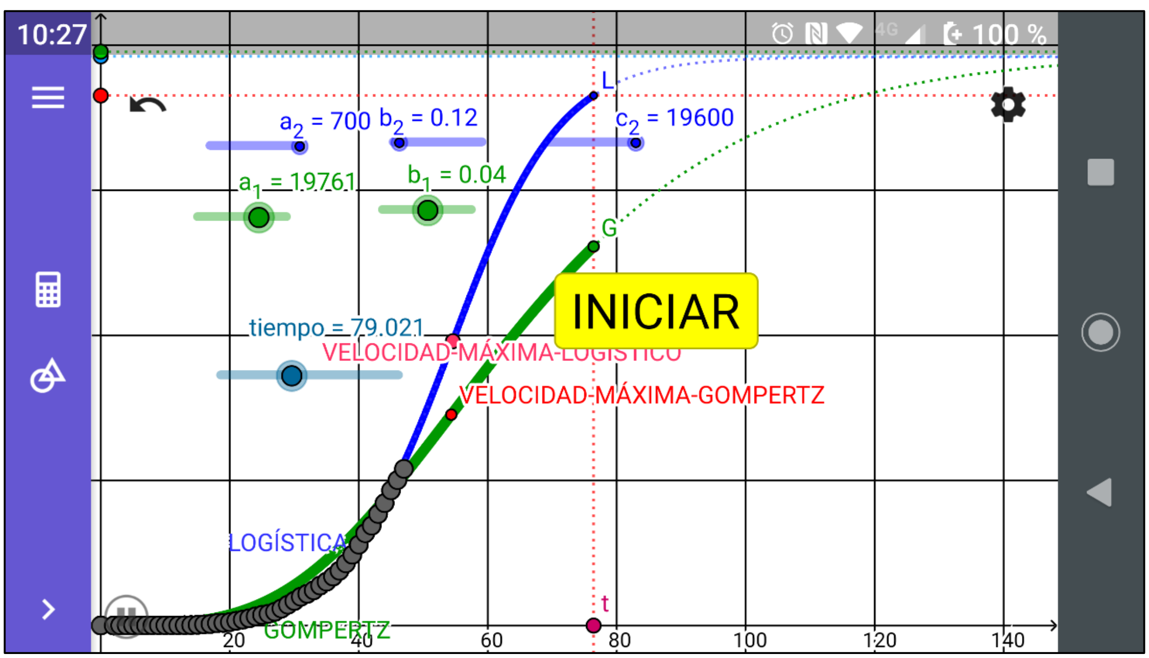


Figura 6: COVID19Logística-Gompertz.ggb

En él vemos muchos elementos, algunos ya mencionados y otros nuevos. Los puntos negros corresponden a los datos de **Contagios acumulados**, ***C*** *vs*. **tiempo**, ***t*** en México a partir del 27 de febrero hasta el 20 de abril. La curva azul, es la gráfica de una función logística que habíamos mencionado en la página 4 y sus respectivos deslizadores cuyo propósito es ajustar la curva a los datos reales proporcionados en la tabla anterior.

La curva verde es un modelo **Gompertz**. Te invitamos a explorar internet[2] si deseas saber más acerca de este tipo de función.

$$G(t) = Ke^{-ln\frac{K}{P_0}e^{-ct}}$$

donde

G = Número de contagios

t = Número de días transcurridos a partir de la fecha en que se reportó el brote inicial

K = máximo de contagios estimado durante un brote epidémico

P_0 = Número de casos iniciales

c = constante de crecimiento

Para el caso de México, $\boldsymbol{P_0 = 3}$ pues al inicio de la pandemia se reportaron 3 contagios

El valor de $\boldsymbol{K}$ lo establecemos con el deslizador $\mathbf{a_1}$ y **c** con el deslizador $\mathbf{b_1}$

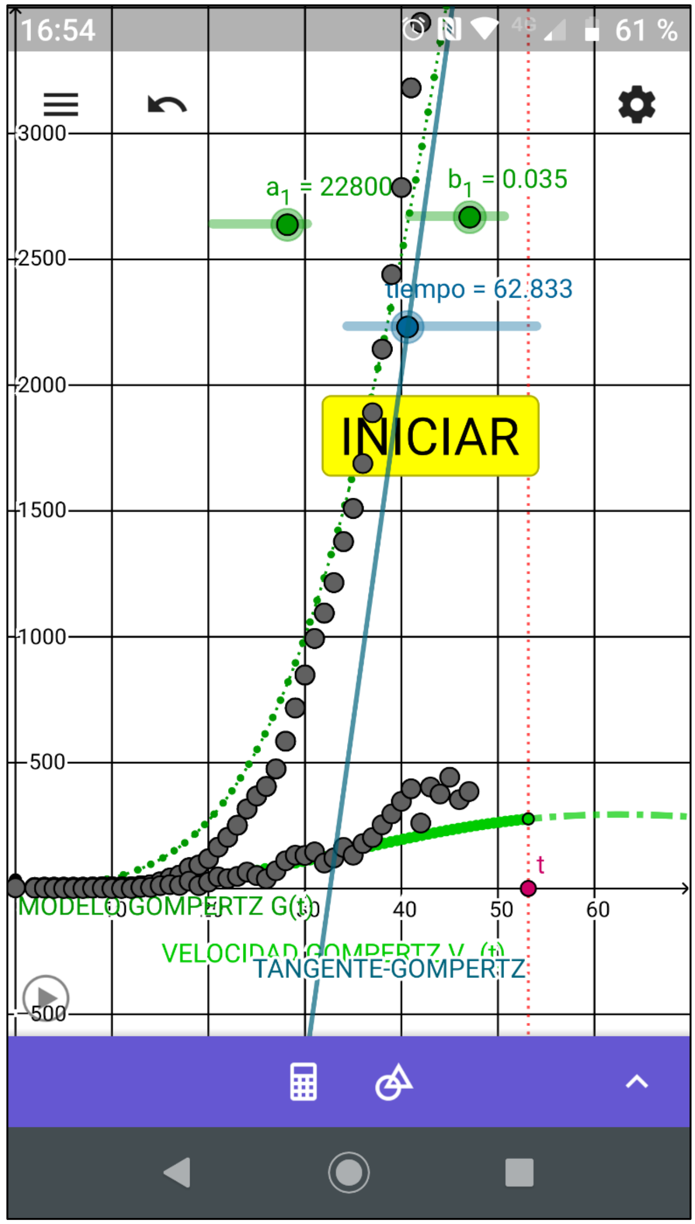


Figura 7: COVID19Gompertz.ggb

¿Encuentras algún parecido entre esta gráfica de un **MODELO GOMPERTZ *G*(*t*)** y la gráfica de un **MODELO LOGÍSTICO *L*(*t*)** como la que usaste en la actividad del CRECIMIENTO DE UN ÁRBOL? La respuesta seguramente será afirmativa, porque ambas son funciones exponenciales, con ciertas variantes particulares. En la figura

[2] https://www.rankia.com/blog/game-over/4523251-futuro-pandemia-segun-matematicas?votar_id=4523251

anterior podemos identificar, aparte de los datos de ***contagios acumulados** vs*. ***tiempo*** en México hasta el 20 de abril, la gráfica de $G(t)$ y la gráfica de $V_G(t)$. La $G(t)$ pareciera tener un buen ajuste

Más allá de las diferencias que se puedan identificar en sus expresiones algebraicas, hay una en especial que es la que pareciera volver más adecuado el **MODELO GOMPERTZ** para el estudio del COVID19 que el **MODELO LOGÍSTICO**. Intentaremos ilustrar esta diferencia

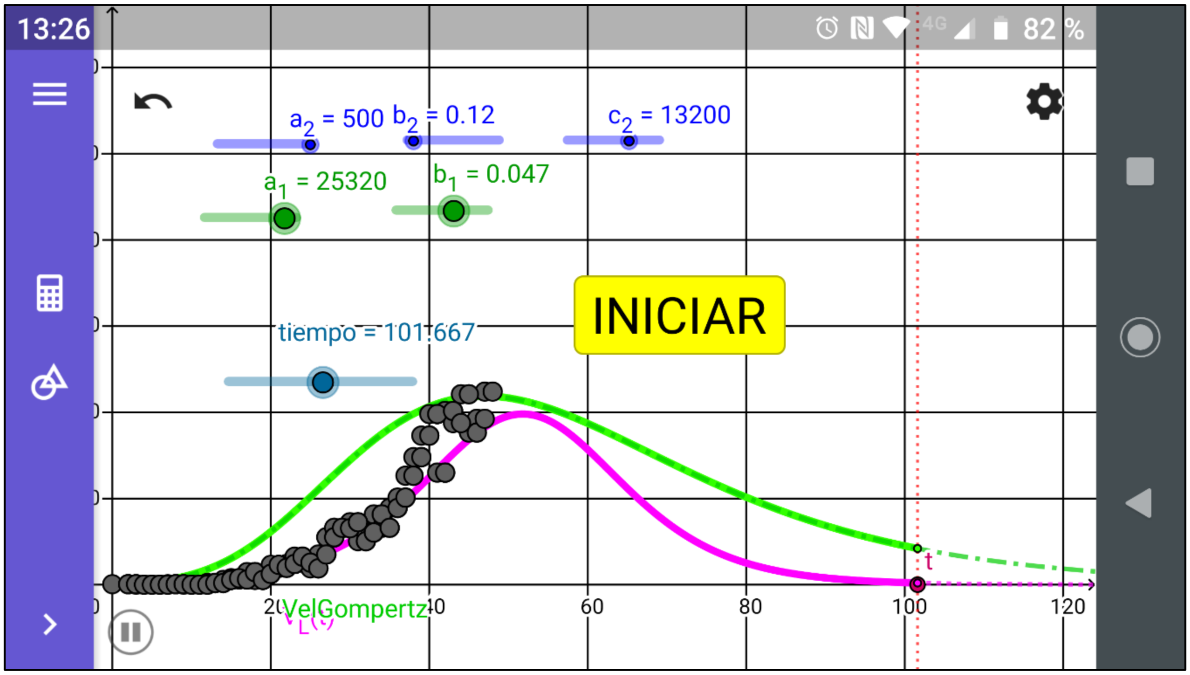


Figura 8**: COVID19Vlogística-Vgompertz.ggb**

Con los datos de **Contagios acumulados** ***vs*****. tiempo**, calculamos los valores de $V(t)$, usando la fórmula de la página 4, y éstos los comparamos con las gráficas la **Velocidad de Contagios** de acuerdo al Modelo Gompertz, $V_G(t)$ (gráfico verde) y del Modelo Logístico $V_L(t)$ (gráfico rosa). Teniendo juntas las gráficas correspondientes a las velocidades de los contagios acumulados de ambos modelos[3] parecería que es posible distinguir la diferencia principal entre ambas. En la gráfica del modelo logístico, la rosa, se observa que la parte del crecimiento es exactamente igual a la parte del decrecimiento solo que "volteada" y por ello se dice que esta función es **SIMÉTRICA**; en cambio la gráfica del modelo Gompertz, la verde, se observa que, en poco más de 40 días la gráfica alcanza su punto más alto, lo que llamamos su **MÁXIMO** o lo que en estos días escuchamos en los medios que llaman **EL PICO EPIDÉMICO** y la etapa de decrecimiento tiene una duración según este modelo, de alrededor de 70 días. Es decir, sube mucho más rápidamente que al bajar. Por eso se dice que el modelo o función GOMPERTZ es **ASIMÉTRICA**. Esto último coincide con lo ya mencionado respecto al comportamiento de la epidemia en China en la página 6.

Ambas gráficas, dado que muestran la velocidad con la que cambian los contagios, no son otra cosa que las gráficas de las funciones **DERIVADAS** de los modelos **LOGÍSTICO** y **GOMPERTZ**.

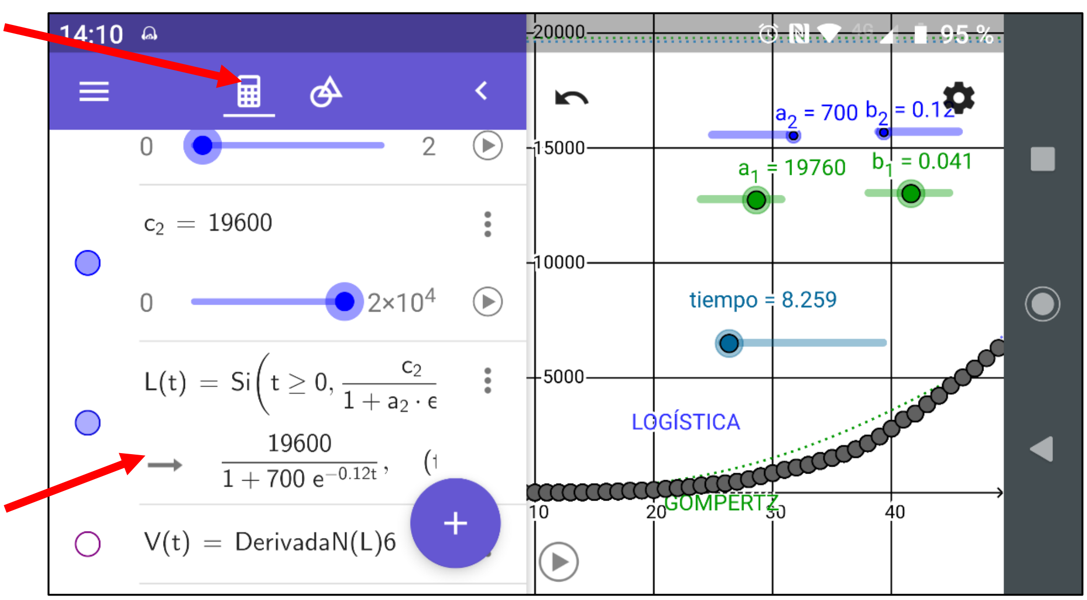
Antes de continuar con el siguiente apartado, revisa el video localizado en https://youtu.be/pnyUX7K8BQ4

---

[3] Las expresiones para calcular las velocidades $V_L(t)$ y $V_G(t)$ se obtienen derivando las expresiones de $L(t)$ y $G(t)$

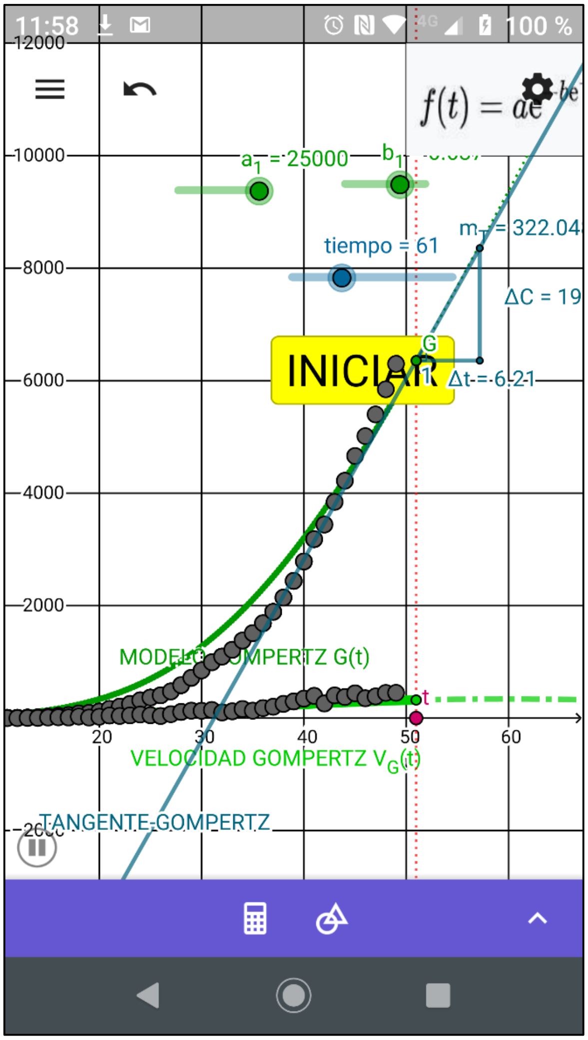
ACTIVIDADES

1. Después de revisar toda la información anterior, carga en tu dispositivo (celular, Tablet, o computadora) el archivo **COVID19Logística.ggb** y mueve cada uno de los deslizadores para que identifiques el efecto que tiene cada uno de ellos sobre la curva. Hazlo hasta que el comportamiento del gráfico logístico se ajuste lo más posible a la **CURVA EPIDÉMICA**, la cual recuerda, es la gráfica de los puntos negros, que es la información real de ***contagios acumulados vs. tiempo*** en México. Ten presente que puedes acercarte o alejarte a la(s) gráficas tanto como desees para observar con más detalle aquello que más te interese.
2. De acuerdo al resultado que obtuviste en el punto anterior, ¿cuántos días tendrán que transcurrir para que comience a disminuir la velocidad de propagación de los contagios, de acuerdo al **MODELO LOGÍSTICO** al que tú llegaste? ____
3. Si la referencia es esta función ¿alrededor de cuántas personas se llegarán a contagiar? ____________
____
4. También, con base en este modelo, ¿aproximadamente cuántos días tomará para que la epidemia alcance niveles que permitan afirmar que ya fue controlada? ______________________________
____
5. Con base en tu respuesta anterior, ¿cuál es el dominio de $L(t)$ y su imagen? ____________________
____
6. Anota la expresión algebraica de la función $L(t)$ que obtuviste, tomando en cuenta los valores a los que llegaste para cada uno de los deslizadores. Para ello, abre la ventana algebraica pulsando el ícono de la calculadora como se indica en la figura siguiente ______________________________
____
____



7. ¿Qué dato importante podemos obtener de la recta que pasa por el punto **L**? ____________________
____

8. Ahora, carga en tu dispositivo el archivo **COVID19Gompertz.ggb** y realiza el mismo ejercicio que con el anterior, mueve los deslizadores a fin de que ajustes la curva del **MODELO GOMPERTZ** a la **CURVA EPIDÉMICA** y contesta las siguientes preguntas.



9. De acuerdo al resultado que obtuviste en el punto anterior, ¿cuántos días tendrán que transcurrir para que comience a disminuir la velocidad de propagación $V_G(t)$ de los contagios, de acuerdo al **MODELO GOMPERTZ** ______________________________

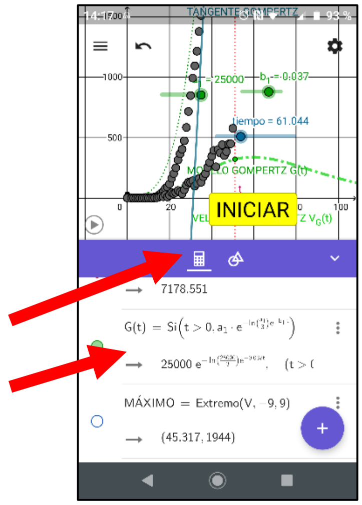
10. Si la referencia es esta función ¿alrededor de cuántas personas se llegarán a contagiar? ____ ____

11. También, con base en este modelo, ¿aproximadamente cuántos días tomará para que la epidemia alcance niveles que permitan afirmar que ya fue controlada? ______________________________

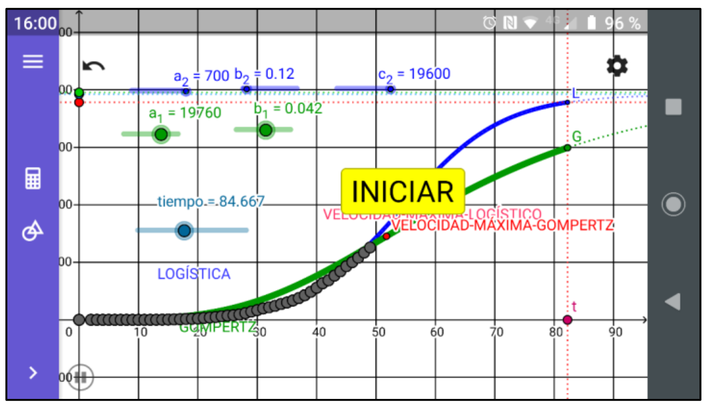
12. Con base en tu respuesta anterior, ¿cuál es el dominio de $G(t)$ y su imagen? ____ ____

13. ¿Qué valores importantes podemos obtener de la recta que pasa por el punto **G**? ____ ____

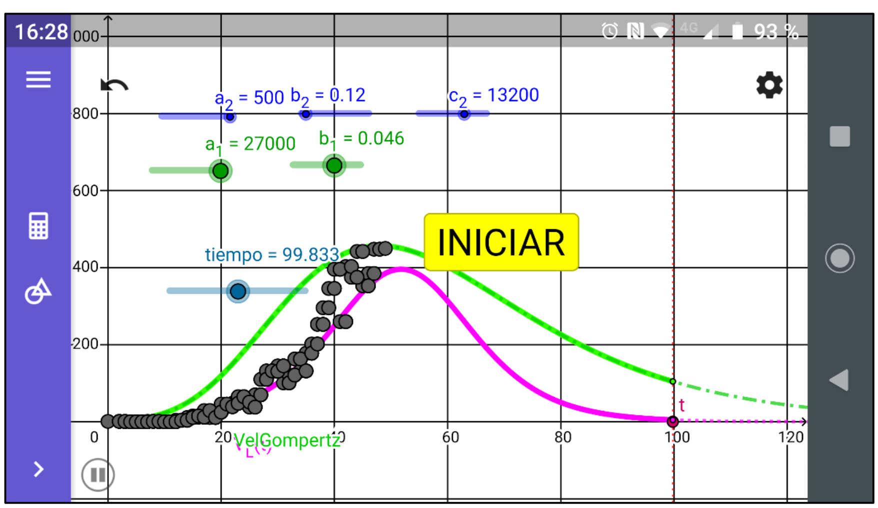
14. Anota la expresión algebraica de la función $G(t)$ a la que llegaste sustituyendo los valores de cada uno de los parámetros de los deslizadores en la expresión señalada con la flecha roja____ ____



15. Carga en tu dispositivo el archivo **COVID19LogísticaGompertz.ggb**



16. Usa los deslizadores para ajustar ambas curvas lo más posible a los datos reales. Anota estos valores obtenidos para cada deslizador.
17. Enseguida, abre el archivo **COVID19Vlogística-Vgomperts.ggb** y sitúa los valores de los 5 deslizadores en aquellos que habías determinado en el punto anterior



18. ¿Cuántos gráficos tenemos en pantalla?, ¿qué variables se relacionan en cada una de ellas? ____
____
19. Después de trabajar con ambos modelos, ¿cuál de ellos consideras se ajustan mejor a los datos reales? ____
20. Con base al trabajo realizado en esta actividad, ¿dentro de cuántos días considerarías sería seguro que tú y tu familia continuaran con su rutina normal de vida? ____

NOTA IMPORTANTE: Esta actividad solo es un ejercicio de aprendizaje. En forma alguna consideramos que disponemos de toda la información y herramientas necesarias para realizar un pronóstico confiable.

#QUÉDATEENCASA

<u>Queremos tener el gusto de saludarte nuevamente sana(o) y contenta(o)</u>